Prolegomena
om Multiplikation,

med **Vidtberömda Filosofiska Fakultetens minne,**

under skydd

af

Mag. CARL JOH. D$^{s.}$ HILL,

Prof. i Math.

till Lagerkransens vinnande

försvarade i stora Auditorium

den 11 Juni 1844

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

af

CARL ERIK SCHWEDER,

Filosofie Kandidat af Blekingska Nationen.

III.

Lund,

tryckt uti Berlingska Boktryckeriet,

1844.

har denna $(a|b)|c = a|(b|c)$. Allt eftersom för $|$ tages $+$, $\times$, ⫯, ♀ eller något annat tjenligt tecken, fås häraf genast en mängd allmänna satser och reglor. Så t. ex. om $|$ betyder $\times$, och således $b|a = b.a$, samt följaktligen, om detta sättes $= c$, $c\lceil a = b = c:a = \frac{c}{a}$, (såvida a och c äro talstorheter) så afge formlerne 5, 6) de vanliga reglorne $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,.\,c}{b\,.\,d} \text{ och } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a\,.\,d}{b\,.\,c}\right)$ för multiplikation och division af bråk.

Enligt denna formeln $(a\ulcorner b)\ulcorner((c\ulcorner d)\ulcorner(e\ulcorner f)) = a|\bar{b}|\bar{c}|d|e|\bar{f} = (a|d|e)\ulcorner(b|c|f)$, förvandlas således genast detta bråksbråk

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\frac{c}{d} : \frac{e}{f}}$$ eller $(a:b):((c:d):(e:f))$ uti det enkla $\frac{ade}{bcf}$.

Betyder deremot $a|b$ eller $b|a$ detsamma som $a + b + nab$, så blir (om detta sättes $= c$, $b =$) $c\lceil a = \frac{c - a}{1 + na}$ och indifferenten $J = a\lceil a = o$, och således $\bar{a} = \frac{-a}{1 + na}$. Derföre, om vi hafva dessa eqvationer:
$a|\bar{b} = x$, $c\lceil d = y$, $e|\bar{f} = z$, $y\lceil z = u$, $x\lceil u = v$ eller $x\ulcorner(y\lceil z) = x\lceil u = v$; eller $a = b|x$, $c = d|y$, $e = f|z$, $y = u|z$, $x = u|v$, d. ä, i närvarande fall dessa: $a = b + x + nbx$, $c = d + y + ndy$, $e = z + f + nfz$, $y = u + z + nuz$, $x = u + v + nuv$, och man blott en gång för alla tillika utvecklat $a|b|c|d|e|f$, så fås deraf genast värdet å den obekanta v, allenast man här för b sätter $\bar{b}$ eller $\frac{-b}{1 + nb}$, samt $\bar{c}$ och $\bar{f}$ för c och f. Eller ginare fås $v = A\ulcorner B$, om $A = a|d|e$ och $B = b|c|f$. Mera sammansatta equationer erhållas, om man med a och b förstår $\frac{a + b + nab}{1 + rab}$ (eller a ♀ b).

O. En mängd eliminationer skulle således efter blott några få allmänna formler och någon obetydlig substition kunna verkställas?

J. Visserligen.

O. Detta torde kunna sträckas ganska långt, särdeles om t. ex. alle symmetriske functioner äfven vore hypersymmetriske.

J. Det sednare är ej fallet, utan t. ex. functionen $\alpha + \beta . (x + y) + \gamma xy$, som väl är symmetrisk, är dock ej hypersymmetrisk, utan såvida $\alpha\gamma = \beta\,(\beta - 1)$, i hvilket fall den också kan föreställas med x ⫯ y ⫯ c, som är $= c + (1 + nc) . (x + y + nxy)$ och detta är den allmännaste helfunction, som är additiv.

O. Det måste dock åtminstone finnas flere additiva bråkfunctioner?

J. Äfven deras antal är ganska inskränkt, och det kan lätt visas, att deras allmännaste form är $\frac{a + b\,(x + y) + cxy}{\alpha + \beta\,(x + y) + \gamma xy}$, der dock coefficienterne måste fullgöra dessa tvenne vilkor: $a : b = \beta : \gamma = b - \alpha : c - \beta$, som göra att den ock kan sättas under formen x ♀ y ♀ e. I allmänhet kunna vi nemligen märka detta lätt bevisliga theorem: *Om $x|y$ är en additiv operation, så är $x|y|c$ det också, varande c hvad constanta (eller för denna operation bestämda) storhet, som helst.*

II. Om Multiplikation.

T. Men äro de additiva operationerne blott de nu nämda ($+$, $\times$, ⫯, ♀), så synes, genom detta nya betraktningssätt, ej vara stort vunnit, man kan ju likaväl alltid förblifva vid de vanliga algebraiska formlerne i deras utvecklade form.

J. Så torde flere af herrarne göra. Man vet huru svårt nya systemer finna nåd inför gamalt folks ögon. Men redan med dessa få additiva functioner kunna vi uträtta ganska mycket. Tro herrarne ej t. ex. det vore vigtigt att redan i Algebran kunna framställa de Trigonometriska functionerne.

O. R. T. Visserligen. Vi hafve ock varit betänkte på den saken.

J. Nå, huru göra herrarne det?

R. Blott genom att utgå från Girkelns eq. $(x^2 + y^2 = r^2)$ eller denna: $Sx^2 + Cx^2 = 1$.

J. Mån-tro saken sålunda är görlig?

O. T. Ingalunda. Vi finna tjenligare, att utgå från serien $x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - ..$ och kalla des summa *Sinus för x.*

J. Men et sådant förfarande afviker ju alltför mycket från Algebrans vanliga; nybegynnare skola derföre alltid finna svårt, att på den vägen göra sig för-

troliga med saken. I alla fall måste då en hel lära om serier i allmänhet, deras convergens m. m. förutgå; och man ser dock icke hvarföre just den nyssnämnda serien bör företrädesvis betraktas, många enklare synas förtjena att först ihogkommas, såsom denna: $1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n}$?

S. Till dessa serier föranledes jag af binomets udda och jemna delar.

J. Det är visserligen närmare på saken, men genom betraktandet af functionen x ♀ y komma vi ginare till målet.

Flere. Huru? Det anse vi otroligt. Då vore dock det nya sättet af vigt, om än ej flere additiva functioner, än de nämnda, funnos.

J. Det förra låter lätt nog visa sig, och hvad det sednare angår, så *äro deras tal legio,* fast de ej äro rationella, och ej ens alla hvad man vanligen kallar Algebraiska.

Flere. Huru detta hänger tillsammans, kunna vi ännu ej inse.

J. För att tydligen kunna visa detta, måste vi gå vidare. Herrarne veta, huru af vanlig addition utbildas vanlig *multiplikation.*

Flere. Det känna vi af (Hs) proportionsläran (och särdeles är Cap. D. instruktivt i detta hänseendet).

J. Nå väl, vi kunna på samma sätt af vår allmänna addition bilda en allmän multiplikation, eller öfvergå från allmän summa till allmän produkt, och det i det hela på alldeles samma sätt.

O. Med en *allmän mångfaldig af a* skulle således förstås den allmänna summan $a|a|a|a\ldots|a$?

J. Alldeles. Och om antalet af de deri ingående a är n, så kunna vi teckna den med $n \odot a$ eller för att tillkännagifva des uppkomst från $|$ med $n¡a$ eller $n!a$ eller $n\!\perp\! a$.

O. Således betyder $1 \odot a$ eller $1!a$ ej annat än a, $2 \odot a$, eller $2!a$ det samma som $a|a$, och $3 \odot a = a|a|a = (2 \odot a)|a$, o. s. v.

T. Särdeles derföre om $a|b$ ej är annat än $a + b$, så blir $2 \odot a$ eller $2 \dot{\perp} a$ ej annat än $2 . a$, och i allmänhet $n \odot a$ eller $n ! a = n . a$.

O. Men om $a|b$ betyder detsamma som $a . b$, så blir $2 \perp a = 2 \dot{\times} a = a . a = a^2$, $3 \perp a = 3 \dot{\times} a = a . a . a = a^3$, och i allmänhet $n \odot a = n \perp a = n \times a = a^n =$ den n^{te} potensen af a.

J. Alldeles. Och om $x|y = x + y + cxy$ eller är det samma som $x \,\dot{\perp}\, y$, så blir $2 \,\dot{\perp}\, x = x \,\dot{\perp}\, x = 2x + cx^2$, eller en qvadratisk function af x, som ock kan tecknas $2 \,\dot{\perp}_*\, x$ eller $2 \ast x$. Likaledes blir $3 \ast x = x \,\dot{\perp}\, (2 \ast x) =$ $= x + (1 + cx)(2x + cx^2) = 3x + 3cx^2 + c^2 x^3$, och i allmänhet $n \,\dot{\perp}_*\, x$ en viss $n$gradig helfunction af x, så vida n är ett helt tal, hvilket vi ännu antaga. Äfvenså om $x|y = x \,\text{♀}\, y = \dfrac{x + y + cxy}{1 + axy}$, så blir $2 \odot x = \dfrac{2x + cx^2}{1 + ax^2}$ eller en bråkfunction af andra graden, hvars särskilta tecken må vara $2 \,\dot{\perp}_*\, a$ eller $2 \underset{*}{\odot} x$ eller och likaledes $3 \underset{**}{\odot} x$ en af 3:e graden o. s. v.

A. Tecknet $\odot$ kan således hafva mångahanda betydelser.

J. Visserligen. Det betyder dock alltid den från motsvarande summan $(|)$ ursprungna producten. Således när $|$ betyder $+$, $\times$, $\dot{\perp}$, ♀ etc. så måste ock $\odot$ motsvarigt (respective) betyda $\times$, $\dot{\times}$, $\dot{\perp}_*$, $\underset{*}{\odot}$. om $n \,\dot{\times}\, x = x^n$, hvilket sednare allmänt brukade uttryck ej är annat än en förkortning, der operationstecknet är uteslutet, likasom $\times$ uti nx. Rättare kunde man dock skrifva nx i stället för $n \odot x$, eller utesluta multiplikations-teknet, så länge det är allmänt eller ej till sin särskilta natur bestämdt. Det finnes således lika många allmänna multiplikationer, som additioner, och sjelfva potenseringen kan anses som en art af de förre, eller som en högre multiplication, när den vanliga anses som en addition.

A. Men potensering har andre reglor än multiplikation, och således kunna väl ej några reglor för den allmänna multiplikation utfinnas?

J. Jo! se, det är just detta som är fallet. Först och främst kan man på alldeles samma sätt, som i Cap. D) af proportionsläran, både finna och bevisa (för det fallet att n och r äro hela tal) följande *theoremer:*

1) Om $a = b$, så är $n \odot a = n \odot b$.

2) $n \odot (a|b) = (n \odot a)|(n \odot b.)$.

Cor. $n \odot (r \odot a) = r \odot (n \odot a)$.

3) $n \odot (a \lceil b) = (n \odot a) \lceil (n \odot b)$.

4) $(n \odot a)|(r \odot a) = (n + r) \odot a$.

Cor. $(n \,.\, r) \odot a = n \odot (r \odot a)$.

5) $(n \odot a) \lceil (r \odot a) = (n - r) \odot a$.

O. Desse formler ega, som man ser, mycken likhet med de å nyssnämnde ställe förekommande, hvilka de ock återgifva, om för $|$ sättes $+$ och $\times$ eller . för $\odot$, samt — för $\ulcorner$.

J. Detta är också nödvändigt, då de ej äro annat än högst speciella fall af de nu uppställda. Man kan ock genom et motsatt tecken-ombyte, (nemligen genom att skrifva $|$, $\ulcorner$ och $\odot$ för $+$, — och $\times$) erinra sig dessa från dem i proportionsläran Cap. D, dock böra vid satserne 4, 5 och 4 Cor. tecknen mellan mångfaldighets-visarne bibehållas oförändrade.

O. Vid nogare eftersinnande finner jag ock dessa satser återgifva kända potens-formler. Om nemligen för $|$ sättes . och således $\dot{\times}$ för $\odot$, (eller x^n för $n \odot x$), så fås:

1) Om $a = b$, så $a^n = b^n$.

2) $(a \,.\, b)^n = a^n \,.\, b^n$.

Cor. $(a^r)^n = (a^n)^r$.

3) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

4) $a^n\, a^r = a^{n+r}$.

Cor. $(a^n)^r = a^{(n \,.\, r)}$.

5) $a^n : a^r = a^{n-r}$.

J. Alldeles. Och på samma sätt, om man för $|$ och $\odot$ sätter $\dot{\perp}$ och $\ddagger$ eller ock ♀ och $\underset{*}{\odot}$, skall man finna motsvarande satser om de hel- eller bråk-functioner, som $n \odot x$ då kommer att betyda, och om man vill, skall man äfven genom fullständig utveckling kunna verificera detta; hvilket dock i hvarje sär-skilt fall måste vara öfverflödigt, då alla dessa satser låta bevisa sig på en gång, och det på alldeles samma sätt, som de motsvarande i proportions-läran, eller de äro beviste i och med de allmänna formlerne.

O. Men dessa formler gälla ännu endast, när n och r äro hela positiva tal, och det kan ännu vara tvistigt, om de ej sakna all betydelse, när dessa blott blifva skilnaden mellan hela tal, att ej tala om när de äro positiva eller negativa bråk eller surda tal.

J. Den saken kunna vi hjelpa på en gång, sedan nemligen de vanlige multiplikations-reglorna genom proportionsläran, eller på annat vederbörligt sätt, blifvit bevista. Jag antager då, att formeln 4) (hvilken vi, med uteslutande af

tecknet $\odot$, också kunna skrifva så: $na|ra = (n + r)\,a,$) gäller icke allenast när n och r äro hela tal, utan äfven när de betyda hvad talstorheter som helst, vare sig bråk eller surdt tal, positivt eller negativt tal, och vill då, att just derur först skall utletas hvad $n \odot a$ (eller na), som hittills ej blifvit bestämd utan för det fall, när n är helt positivt tal, tillfölje deraf skall komma att betyda, när n icke är helt positivt tal. Detta kan tillgå på följande sätt: Först kan (alldeles såsom i Cap. D) häraf härledas både formeln 5), eller $(na)\lceil(ra) = (n - r)a$, som då äfven kommer att gälla för hvad värde som helst på n och r, samt Cor. till 4), som till en början blott utfaller bevist för $n =$ helt tal, men lätt äfven utsträckes derhän, att n och r få vara hvad talstorheter som helst. När detta är gjort, om man tillika iakttager att, när i 5) sättes $n = r$, blir $o \odot a = oa = = na\lceil na = \alpha\lceil\alpha = I =$ indifferent för $|$; så måste, när sedermera i 4) $n + r$ sättes $= o$; $na|ra$ blifva $= oa = I$, och följaktligen $ra = I\lceil(na) = (\overline{na})$, d. ä. $(-n)a$ eller $(-n) \odot a = (\overline{n \odot a}) = I\lceil(n \odot a)$ eller en product med en negativ förfactor $(-n)$, måste vara den på allmänt sätt *negativa* producten med samma förfactor, eller, som är det samma, den är ej annat än den allmänna skilnaden mellan indifferenten (I) och en product med samma förfactor tagen positiv. Derigenom kan således alltid hvarje negativ förfactor förvandlas till en positiv, så att det derefter är nog att betrakta denna. Om vi nu vidare uti den antagna allmänna formlen $(n + r)a = na|ra$ tage $r = 1$, så blir $(n + 1)a = na|1a$, och är n helt tal, så är detta också detsamma som $na|a$, hvarföre $1a$ eller $1 \odot a$ måste antagas $= a$; och genom en gentagen användning af denna formel vises lätt, att $na = a|a|a\,..|a$ eller $= n \odot a$ i den först stadgade betydelsen, så länge, som n är helt tal. Men är redan på sätt, som nyss här förut antyddes, formlens $(nr)a = n(ra)$ (eller 4: Cor.) allmänna giltighet ådagalagd, så finnes sedermera deraf lätt den allmänna betydelsen af ra eller $r \odot a$ när r är et bråk.

Om t. ex. $r = \frac{1}{n}$, och vi sätta $ra = x$, så blir föregående formel $1a = n\,(x)$ eller $a = nx$, och således x eller ra eller $\frac{1}{n} \odot a$ ej annat än roten i denna eq. $a = n \odot x$, hvilken ock kan tecknas så: $x = \overline{n \odot} a$ eller $n^{-} \odot a$, hvarför ock $\frac{1}{n} \odot a = \overline{n} \odot a$. Men är n et helt tal och betyder $|$ en känd operation, så är

$a = n \odot x$ en alldeles gifven equation och således är härigenom äfven $\frac{1}{n} \odot a$ tillräckligen känd. Så t. ex. om $n = 2$ och $|$ är $\ddagger$, så är equationen denna $a = 2x + cx^2$ eller quadratisk, (hvars lösning ock i en omvänd ordning är antydd genom tecknet $\frac{1}{2}\ddagger\alpha$ eller $2\overline{\ddagger}\alpha$ och således äfven funnen, så snart det här tecknade eller $n\ddagger a$ låter evalvera sig).

O. Men det kan, såsom just i det nu anförda fallet, hända att för $\frac{1}{n} \odot a$ erbjuda sig flere värden och således att des betydelse ej blifvit nog bestämd.

J, Detta antyder endast att $\frac{1}{n} \odot a$ då är et mångtydigt tecken eller operationen, som deraf föreställes, mångformig. I sådant fall kan man dels efter något särskilt kännemärke bland dessa många värden utvälja ett, som kallas *hufvudvärdet,* eller kan man äfven göra afseende på alla värdena, samt undersöka i hvad ordning de böra förenas, för att äfven de allmänna formlerne må med dem ega giltighet. Till en början kan man dock beqvämast nöja sig med det första; i hvilket fall formlen 1) kan antagas gälla jämte den 4:de. Så t. ex. kan man vid vanliga potenser och rötter blott till en början taga de positiva i betraktande, af hvilka sedermera alla de öfriga kunna bestämmas. Ehuru äfven flere allmänna satser om dessa många värdena kunna framställas, vilje vi dock för mera korthet och tydlighet skull, till en början blott antaga, att det endast är fråga om ett enda hufvudvärde af $\frac{1}{n} \odot a$. Med detta finner man lätt (medelst formlen $(nr)\, a = n(ra)$) att $\frac{m}{n} \odot a = \left(m \,.\, \frac{1}{n}\right) \odot a = m \odot \left(\frac{1}{n} \odot a\right)$, eller $\frac{m}{n} \odot a = m \odot (n \overline{\odot} a)$ eller ock $\overline{=}\, n \odot (m \odot a)$, hvarigenom betydelsen af $u \odot a$ alltid är gifven, så snart u är et bråk och derifrån kan man enligt kända methoder öfvergå till det fall då u är et surdt tal.

Cl. och *O.* Det vill säga: det, hvilket man använder för att bevisa läran om de allmänna potenserne, der exponenterne äro hvad talstorheter som helst?

J. Ja väl; men det bör dock uppfattas något strängare, än Brodren *Cl.* gjort. Vi vilja dock ej nu uppehålla oss dermed, utan blott åtnöja oss att i all korthet antyda det saken mycket underlättas deraf, att formeln

$(n.r) \odot a = n \odot (r \odot a) = r \odot (n \odot a)$ först lätt bevises gälla, när r är surdt och n är bråk, hvaraf den lätt utsträckes till det fall när n och r bägge äro surda tal, vare sig positiva eller negativa, så vida man nemligen stadnar vid hufvudvärdet, (för de öfrige måste den naturligtvis stundom något modifieras). Då sålunda denna, äfvensom formlerne 4) och 5) befunnits ega allmän giltighet, så kan ock detta ådagaläggas om de öfrige. Cor. till 2) följer nemligen då straxt deraf, att $n.r = r.n$, och sjelfva theor. 2 bevises så: sätt $n \odot a = \alpha$, $r \odot a = \beta$, så blir för hvarje värde på m, n och r, $m \odot \alpha = (m.n) \odot a$, $m \odot \beta = (m.r) \odot a$, och således både $\alpha | \beta = n \odot a | r \odot a = (n + r) \odot a$, och $m \odot \alpha | m \odot \beta = \widehat{m.n} \odot a | \widehat{m.r} \odot a = (mn + mr) \odot a$, samt äfven $m \odot (\alpha | \beta) = m \odot ((n + r) \odot a) = (mn + mr) \odot a$, hvarföre $m \odot (\alpha | \beta) = m \odot \alpha | m \odot \beta$. H.S.B. Och deraf bevises sedermera alldeles på proportionslärans sätt theor. 3).

O. Alla den allmänna multiplikationens grundformler skulle således ganska väl kunna stadgas; dock har jag ännu några tvifvelsmål angående dels de särskilta värdena som det mångtydiga tecknet $u \odot a$ kan antaga, och dels angående det rätta valet af des hufvudvärde i hvarje fall.

J. För att häfva alla, vill jag endast antyda följande lätt *bevisliga theorem:* Om $n \odot a = n \odot b$, så är b antingen $= a$ eller $= a | \varepsilon$, der ε ej kan vara annat än $= n \odot I$ eller roten i equationen $n \odot \varepsilon = I$, om I är indifferenten för $|$. Är x en rot i denna equation och m helt tal, så är $m \odot x$ en annan; hvadan alla rötterne fås af en primitif.

Med dettas tillhjelp kunna icke allenast alle rötterne i equat. $n \odot x = a$ finnas, när en är funnen, utan äfven våra föregående allmänna theoremer modifieras så, att de äfven blifva lämplige vid den allmänna productens värden.

Detta förklaras dock tydligast vid genomgående af hvar och en af de särskilta producter, som höra hit (den vanliga, som saknar mångfaldiga värden, den näst högre eller vanliga potensen o. s. v.) — Ett enkelt fall af sistnämnde theorem är den länge kända satsen, att om $x^n = a^n$, $y^n = 1$, så är $x = ay^r$.

Flere Ar. Vi börja nu inse att de 5 allmänna theoremerne jemte deras bägge Corollarier både äro bevisliga och äfven af en vidsträckt brukbarhet, om de ens ej anginge mer än dessa producter: $n.a$, a^n, $n \ddagger a$ och $n \odot a$. Men det sades att äfven flere sådane finnas.